1.3.2 Početní příklady - rovnoměrně zrychlený pohyb I

Předpoklady: 010118, 010301

Pedagogická poznámka: Cílem hodiny je, aby se studenti naučili samostatně řešit příklady. Aby dokázali najít vztah, který umožňuje příklad vyřešit, dokázali ze vztahů vyjadřovat, případně dosazovat z jednoho vztahu do druhého.
Problémem je jejich odpor k obecnému řešení. Nezbývá nic jiného než chodit mezi lavicemi a vyžadovat, aby příklady obecně doopravdy dopočítali.

Př. 1: Závodní automobil zrychlí z 0 km/h na 100 km/h za 4,3 s. Urči dráhu, kterou při zrychlování ujede.

$v_0 = 0$, $v = 100\,\text{km/h} = 27{,}8\,\text{m/s}$, $t = 4{,}3\,\text{s}$, $s = ?$

Rovnice zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí: $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$.

$\Rightarrow$ V obou rovnicích máme dvě neznámé veličiny $\Rightarrow$ z první rovnice vyjádříme *a* (které nepotřebujeme) a dosadíme za *a* do druhé rovnice: $v = at \;\Rightarrow\; a = \frac{v}{t}$.

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{v}{t}t^2 = \frac{1}{2}vt$$

Dosadíme: $s = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}27{,}8 \cdot 4{,}3\,\text{m} = 60\,\text{m}$.

Auto ujede během zrychlování 60 m.

Pedagogická poznámka: Začátek příkladu je nutné spočítat společně, zbytek by měli dělat studenti sami (i když jde v podstatě jen o matematiku), opisování úprav z tabule má nulový přínos. Další příklady by měli žáci počítat zcela samostatně.
Přerušujeme tak, aby na příklady 5 a 6 zbyla alespoň čtvrthodina.

Postup, který jsme použili u předchozího (a budeme používat u dalších příkladů):

- Podle fyzikální situace rozhodneme, zda budeme používat celou soustavu rovnic $v = v_0 + at$, $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ nebo pouze zjednodušenou verzi $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$ s nulovou počáteční rychlostí.
- Podle veličin známých se zadání se rozhodneme, zda můžeme počítat pouze s jednou z rovnic, nebo budeme muset z jedné vyjádřit a dosadit do druhé.
- Vypočteme vztah pro zadanou veličinu.
- Dosadíme do upraveného vztahu.

Pedagogická poznámka: Žáci by si měli postup stručně někam napsat a při práci v lavicích by si měli hlídat, že podle něj postupují. Nejčastěji studenti (hlavně kluci) vyjadřují zbrkle ze složitější soustavy nebo nedopočítávají vztahy.

Př. 2: Za bezpečný doskok je považován takový, při kterém člověk dopadne na zem maximálně rychlostí 8 m/s. Urči maximální výšku, ze které je možné bezpečně skákat na Zemi (zrychlení padajících předmětů je $10\,\mathrm{m/s^2}$) a na Měsíci (zrychlení padajících předmětů je 6 x menší než na Zemi).

$v_0 = 0$, $v = 8\,\mathrm{m/s}$, $a_Z = 10\,\mathrm{m/s^2}$, $s = ?$

Rovnice zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí: $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$.

$\Rightarrow$ V obou rovnicích máme dvě neznámé veličiny $\Rightarrow$ z první rovnice vyjádříme *t* (které nepotřebujeme) a dosadíme za *t* do druhé rovnice: $v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}$.

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$$

Bezpečná výška pro Zemi: $s_Z = \frac{v^2}{2a_Z} = \frac{8^2}{2\cdot 10}\,\mathrm{m} = 3{,}2\,\mathrm{m}$

Zrychlení na Měsíci: $a_M = \frac{a_Z}{6} = \frac{10}{6}\,\mathrm{m/s^2} = 1{,}67\,\mathrm{m/s^2}$.

Bezpečná výška pro Měsíc: $s_M = \frac{v^2}{2a_M} = \frac{8^2}{2\cdot 1{,}67}\,\mathrm{m} = 19{,}2\,\mathrm{m}$

Na Zemi je bezpečné skákat z výšky 3,2 m na Měsíci dokonce z výšky 19,2 m.

Poznámka: Z předchozího příkladu je vidět jedna z výhod obecného řešení – do výsledného jednoduchého vztahu můžeme ihned dosazovat různá zadání.

Př. 3: Urči, jakou rychlostí dopadne na zem kámen puštěný z výšky 10 m (2. patro). Předpokládej, že padá rovnoměrně zrychleně se zrychlením $10\,\mathrm{m/s^2}$.

$v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$, $s = 10\,\mathrm{m}$, $a = 10\,\mathrm{m/s^2}$, $v = ?$

Jde o rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí: $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$.

$\Rightarrow$ Ani z jedné rovnice není možné vypočítat *v* (v obou jsou dvě neznámé) $\Rightarrow$ z první si vyjádříme *t* (abychom ve vyjádření neměli odmocninu, která by se objevila, kdybychom vyjadřovali *t* ze druhé rovnice) a dosadíme do druhé: $v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}$.

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$$

$$s = \frac{v^2}{2a} \qquad /\,2a$$

$$v^2 = 2sa$$

$$v = \sqrt{2sa} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 10}\,\mathrm{m/s} = 14{,}1\,\mathrm{m/s} = 50{,}9\,\mathrm{km/h}$$

Kámen dopadne na zem rychlostí 50,9 km/h.

Pedagogická poznámka: Studenti se těžko smiřují s tím, že počítají rychlost a přesto dosazují z rovnice rychlosti do rovnice pro dráhu. Je potřeba zdůraznit, že možné jsou oba postupy, ale kvůli vyhnutí se odmocninám je vždy jednodušší vyjadřovat z rovnice pro rychlost a dosazovat do rovnice pro dráhu. Roli nehraje to, která z veličin byla v rovnici původně vyjádřena, ale to, zda v rovnici zůstali pouze veličiny, které známe nebo které chceme počítat.

Př. 4: Jaké je zrychlení kulky v hlavni, je-li její úsťová rychlost 700 m/s a délka hlavně 40 cm? Jak dlouho je kulka během výstřelu v hlavni? Pro obě veličiny odvoď obecné vztahy.

$v = 700\,\mathrm{m/s}$, $s = 40\,\mathrm{cm} = 0{,}4\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$, $a = ?$, $t = ?$

Budeme předpokládat, že kulka se v hlavni pohybuje rovnoměrně zrychleně. Protože konečná rychlost a dráha nevystupují společně ani v jedné rovnici, budeme muset jednu z neznámých vyjádřit z rovnice pro rychlost a dosadit ji do rovnice pro dráhu.

$$v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}$$

Dosadíme do rovnice pro dráhu: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$.

$$a = \frac{v^2}{2s}$$

Získaný vzorec pro zrychlení můžeme použít při odvozování vzorce pro čas:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{v}{\frac{v^2}{2s}} = \frac{2s}{v}.$$

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{700^2}{2 \cdot 0{,}4}\,\mathrm{m/s^2} = 612500\,\mathrm{m/s^2}$$

$$t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 0{,}4}{700}\,\mathrm{s} = 0{,}0011\,\mathrm{s}$$

Zrychlení kulky v hlavni je $612500\,\mathrm{m/s^2}$, kulka je v hlavni $0{,}0011\,\mathrm{s}$.

Pedagogická poznámka: Vnímavější studenti mají problémy s výslednou hodnotou zrychlení (zdá se jim příliš velká). Ujistěte je, že číslo je opravdu reálné.

Př. 5: Automobil se pohybuje rychlostí 80 km/h. Urči jeho brzdnou dráhu (dráhu, kterou urazí než se zastaví), pokud může dosáhnout maximálního zpomalení $8{,}4\,\mathrm{m/s^2}$.

$v_0 = 80\,\mathrm{km/h} = 22{,}2\,\mathrm{m/s}$, $v = 0$, $a = -8{,}4\,\mathrm{m/s^2}$, $s = ?$

$$v = v_0 + at$$

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$ Na výpočet dráhy z druhé rovnice potřebujeme čas, ten můžeme vypočítat z první rovnice: $v - v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{vv_0 - v_0^2}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$s=\frac{vv_0-v_0^2}{a}+\frac{v^2-2vv_0+v_0^2}{2a}=\frac{2vv_0-2v_0^2}{2a}+\frac{v^2-2vv_0+v_0^2}{2a}=\frac{v^2-v_0^2}{2a}$$

$$s=\frac{v^2-v_0^2}{2a}=\frac{0^2-22,2^2}{2\left(-8,4\right)}\,\mathrm{m}=29,4\,\mathrm{m}$$

Auto zastaví na dráze 29,4 m.

Už při rozboru poskakujícího míče, jsme si řekli, že část pohybu ve vzduchu, kdy jej Země zastavuje (a on stoupá nahoru) je rovnocenná s částí pohybu, kdy jej Země urychluje (a on padá dolů). V předchozím příkladu byly vzorce poměrně složité i kvůli tomu, že se v obou rovnicích vyskytovaly členy s v_0. Bez nich by byly výpočty podstatně jednodušší (jako předchozích příkladů). Zkusíme místo předchozího příkladu spočítat analogický příklad o zrychlování (u něj bude počáteční rychlost nulová a vzorce jednodušší).

Př. 6: Vymysli analogický příklad o zrychlování k předchozímu příkladu. Příklad vyřeš a srovnej řešení.

Stojící automobil na zrychlit na rychlost 80 km/h. Urči jakou dráhu při tom ujede, pokud může dosáhnout maximálního zrychlení $8,4\,\mathrm{m/s^2}$.

$v=80\,\mathrm{km/h}=22,2\,\mathrm{m/s}$, $v_0=0$, $a=8,4\,\mathrm{m/s^2}$, $s=?$

Použijeme jednodušší vzorce bez členů s počáteční rychlostí (je nulová).

$v=at$

$s=\frac{1}{2}at^2$ $\Rightarrow$ Na výpočet dráhy ze druhé rovnice potřebujeme čas, ten můžeme vypočítat z první rovnice: $v=at$ $\Rightarrow$ $t=\frac{v}{a}$.

$$s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2=\frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2}=\frac{v^2}{2a}$$

$$s=\frac{v^2}{2a}=\frac{22,2^2}{2\cdot 8,4}\,\mathrm{m}=29,4\,\mathrm{m}$$

Auto zastaví na dráze 29,4 m.

Oba příklady vyšly stejně $\Rightarrow$ **příklady na zpomalování můžeme řešit pomocí analogií pro zrychlování**.

Shrnutí: Příklady, ve kterých nemůžeme dosazovat ani do jedné z rovnic, řešíme vyjádřením neznámé a dosazením výrazu do druhé rovnice.